

Eesti LXV matemaatikaolümpiaad
TALLINNA KOOLIVOOR
30.novembril 2017.a. Tallinnas
XII klass

Lahendamiseks on aega 4 tundi.

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Taskuarvutit kasutada ei lubata.

1. On antud kaks aritmeetilist jada (a_n) ja (b_n) . Nende jadade esimesed liikmed on võrdsed (s.t $a_1 = b_1$) ja jada (a_n) vahe on kaks korda suurem kui jada (b_n) vahe. Olgu jada (c_n) defineeritud valemiga $c_n = a_n + b_n$ iga $n \geq 1$ jaoks. Jada (c_n) summa valem on $S_n = \frac{n(n+25)}{4}$. Leia jadade (a_n) ja (b_n) esimesed liikmed ja vahed. Lisaks leia jada (a_n) esimese 2017 liikme summa.

2. Märgi koordinaattasandil kõik punktid koordinaatidega $(x;y)$, kus x ja y rahuldavad võrrandit:

$$\log_5 xy - \log_5 \frac{x}{2} = \log_5 (2 - x)$$

3. Leia vähim täisarv, mida tuleb liita avaldisele $(x-2)(x+2)(x+6)(x+10)$, et selle väärtus oleks positiivne iga reaalarvulise x korral.

4. Trapetsi $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$) alusele AD kui diameetrile on joonestatud ring, mis puudutab külge CD ja lõikab külge AB punktis E nii, et $\frac{AE}{AB} = \frac{3}{4}$. Leia trapetsi pindala, kui ringi raadius on R ja $\angle ACD = 60^\circ$.

5. Laual, mõõtmetega 2017×2017 , on kõik ühikruudud värvitud valgeks. Ühe käiguga tuleb valida kuitahes suur ühikruutudest koosnev ruut, mille nurkades paiknevad ühikruudud on valged ning värvida kaks diagonaalselt vastasnurkades paiknevat ühikruutu mustaks. Leia vähim võimalik valgete ühikruutude arv, mis saab selliste käikude tulemusel lauale jääda.